

Model Matematika Penyakit Kolera Melalui Kontak Antar Individu, Sumber Air, dan Lalat

Mathematical Model of Cholera Disease Through Contact Between Individuals, Water Sources, and Flies

Muhammad Manaqib^{1*}, Fauziah Irma¹, Bagus Fajar Apriyanto¹

¹Matematika, UIN Syarif Hidayatullah Jakarta

*Email Korespondensi: muhammad.manaqib@uinjkt.ac.id

Info Artikel	Abstract
<p>Diterima : 15 Feb 22 Direvisi : 07 Juli 22 Diterbitkan : 20 Agus 22</p>	<p><i>This research developed a model of cholera disease spread using the SIWR (Susceptible, Infected, Water, and Recovery) model added to the fly vector. Based on the mathematical model, the disease-free equilibrium point, the endemic equilibrium point, and the basic reproduction number (R_0) can be obtained. The results of the analysis of the stability of the disease-free equilibrium point were found to be locally asymptotically stable when $R_0 < 1$. This study used some parameter values that are taken from journals and some cases in Haiti to simulate this model. The simulation result shows that cholera disease in Haiti in the future will disappear. Furthermore, an analysis of the sensitivity of the model parameters to R_0. Based on results, there are two parameters that dominantly affect the spread of cholera, namely the rate of infective contact of susceptible individuals with infected individuals and the rate of individual recovery from cholera. So it is recommended in handling cholera outbreaks to reduce contact with infected individuals and immediately take treatment.</i></p>
<p>Kata Kunci: Analisis Sensitifitas, Kestabilan Titik Ekuilibrium, Kolera, SIWR</p>	
<p>Cara merujuk artikel ini: Manaqib, M., Irma, F., & Apriyanto, B. F. (2022). Model Matematika Penyakit Kolera Melalui Kontak Antar Individu, Sumber Air, dan Lalat. <i>Vygotsky: Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika</i>, 4 (2), 79-92. Diunduh dari https://jurnalpendidikan.unisla.ac.id/index.php/VoJ/article/view/539</p>	<p>Abstrak Penelitian ini mengembangkan model matematika penyebaran penyakit kolera menggunakan model SIWR (<i>Susceptible, Infected, Water, and Recovery</i>) yang ditambahkan dengan vektor lalat. Berdasarkan model matematika tersebut, dicari titik kesetimbangan bebas penyakit, titik kesetimbangan endemik, dan bilangan reproduksi dasar (R_0). Hasil analisis kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit diperoleh bersifat stabil asimtotik lokal saat $R_0 < 1$. Simulasi model dilakukan dengan nilai-nilai parameter yang diambil dari beberapa jurnal dan mengambil kasus di Haiti. Hasilnya penyakit kolera di Haiti dalam waktu mendatang akan menghilang. Selanjutnya dilakukan analisis sensitivitas parameter-parameter model terhadap R_0. Berdasarkan hasil terdapat dua parameter yang</p>

dominan berpengaruh terhadap penyebaran penyakit kolera yakni laju kontak infeksi individu rentan dengan individu terinfeksi dan tingkat kesembuhan individu dari penyakit kolera. Sehingga direkomendasikan dalam penanganan wabah kolera untuk mengurangi kontak dengan individu terinfeksi dan segera dilakukan pengobatan.

Copyright © 2022 Vygotsky: Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika. All right reserved

PENDAHULUAN

Bakteri *Vibrio Cholerae* adalah penyebab penyakit kolera (Dolstad et al., 2021). Seseorang yang terkena penyakit kolera mengalami diare secara terus menerus hingga pada akhirnya ia akan mengalami dehidrasi (Basumatary et al., 2021). Jika tidak segera ditangani dengan cepat, maka orang tersebut akan kekurangan cairan dalam tubuhnya dan lama-kelamaan akan menyebabkan kematian (Filary-Szczepanik, 2020).

Kasus kolera dunia tahun 2015 tercatat 172.454 kasus dan 1.304 orang meninggal akibat kolera (Global Health Observatory (GHO) Data, 2015). Di Afrika dilaporkan kasus penyebaran penyakit kolera terjadi sebanyak 41%, di Asia 37%, dan di Amerika 21%. Berdasarkan persentase tersebut, Afrika merupakan benua yang penyebaran penyakit koleranya paling besar di antara benua-benua lainnya. Penyebaran penyakit kolera di Afrika berawal dari Democratic Republic of the Congo (DRC) yang selanjutnya menyebar ke Nigeria, Kenya, Malawi, Somalia, Mozambique, South Sudan, dan Tanzania. Sementara di Amerika, Haiti menjadi negara terbesar yang menyebarkan penyakit kolera, sedangkan di Asia, kolera terjadi di negara Afghanistan dan Iraq (Anggaraditya, 2015; Global Health Observatory (GHO) Data, 2015). Sedangkan di Indonesia Kejadian Luar Biasa (KLB) kolera sudah jarang terjadi, terakhir terjadi KLB pada tahun 2008 di Paniai dan Nabire Provinsi Papua yang mengakibatkan 105 orang meninggal (Puspandari et al., 2010).

Wabah kolera terjadi di daerah yang mempunyai masalah di bidang kesehatan, terutama pada sumber air yang digunakan (Silva & Benitez, 2016). Akses air yang kurang memadai dan sanitasi air yang buruk menyebabkan Bakteri *Vibrio Cholerae* berkembang dan penyakit kolera menyebar dengan cepat (Global Health Observatory (GHO) Data, 2015). Selain itu, sumber air yang digunakan secara bersamaan dengan seseorang yang terinfeksi penyakit kolera juga dapat menyebabkan penyebaran penyakit kolera dalam suatu populasi. Hal ini terjadi apabila kotoran manusia yang terinfeksi kolera dan mengandung Bakteri *Vibrio Cholerae* terkena dan mengkontaminasi sumber air yang digunakan (Posny et al., 2015). Namun tidak hanya itu, jika di sumber air yang tersebut terdapat hewan air (misalnya ikan, kerang, udang, dan belut) maka hewan-hewan tersebut juga akan terinfeksi Bakteri *Vibrio Cholerae*. Sehingga jika seseorang memakan hewan-hewan yang hidup di air yang terkontaminasi bakteri kolera secara mentah atau tidak dimasak dengan matang maka

orang tersebut akan terinfeksi penyakit kolera. Faktor lain yang dapat menyebabkan penyebaran penyakit kolera adalah lalat. Lalat yang hinggap di kotoran manusia ataupun air yang terinfeksi Bakteri *Vibrio Cholerae* juga dapat menjadi faktor pembawa dan penyebaran penyakit kolera.

Salah satu pendekatan untuk menjelaskan solusi dari permasalahan yang terjadi dalam dunia nyata adalah memodelkan matematika (Manaqib et al., 2019), seperti penelitian (Najar et al., 2022; Yahya et al., 2022). Pemodelan matematika mengenai penyakit kolera awalnya dilakukan oleh (Capasso & Paveri-Fontana, 1979) mengenai model deterministik sederhana tentang penyebaran wabah kolera di Mediterania menggunakan asumsi populasi bakteri dan populasi manusia terinfeksi dengan kondisi padat udara. Selanjutnya (Pourabbas et al., 2001) meneliti model matematis penyebaran penyakit kolera melalui kontak antar individu dengan mempertimbangkan waktu infeksi. (Ghosh et al., 2004) meneliti model matematis SIS (Susceptible, Infected, and Susceptible) penyebaran penyakit kolera dengan menambahkan konsentrasi *Vibrio Cholerae* (B) dan pertumbuhan *Vibrio Cholerae* akibat kotoran manusia (E). Selanjutnya (Tien & Earn, 2010) mengembangkan model matematis SIR (*Susceptible, Infected, and Recovery*) menjadi model SIWR, yaitu penyebaran penyakit kolera melalui manusia ke manusia dan lingkungan ke manusia. (Robertson et al., 2013) meneliti mengenai perbedaan bilangan reproduksi awal jalur transmisi penyebaran kolera dari satu sampai n populasi dengan satu sumber air.

Tujuan penelitian ini adalah mengembangkan dan menganalisis model matematika penyebaran penyakit kolera melalui kontak antar individu, sumber air, dan lalat dengan mengembangkan model SIWR yang diperkenalkan oleh (Tien & Earn, 2010). Keterbaruan penelitian ini adalah penambah vektor lalat sebagai pembawa Bakteri *Vibrio Cholerae* sehingga diperoleh model SIWR-SI. Selanjutnya model akan dicari titik kesetimbangan dan kestabilannya. Setelah itu akan dilakukan simulasi model dan analisis sensitifitas terhadap bilangan reproduksi dasar (R_0).

METODE

Berikut metode yang digunakan :

1. Formulasi model

Tahap ini peneliti akan mengkonstruksi model matematika penyebaran penyakit kolera melalui kontak antar individu, sumber air, dan lalat. Model tersebut dikembangkan dari model SIWR (Tien & Earn, 2010) yang ditambahkan vektor lalat sebagai pembawa bakteri *Vibrio Cholerae*.

2. Titik kesetimbangan dan R_0

Metode *next generation matrix* digunakan untuk mencari R_0 dengan cara sebagai berikut.

- Linearisasi subsistem terinfeksi dengan menggunakan matriks Jacobi (J) di sekitar titik ekuilibrium bebas penyakit.
- Dekomposisi matriks Jacobi (J) menjadi matriks Transimisi (F) dan matriks Transisi (V).
- Menghitung nilai R_0 yang merupakan radius spektral dari matriks FV^{-1} .

3. Analisis kestabilan titik kesetimbangan

Kestabilan lokal titik kesetimbangan analisis menggunakan nilai eigen matriks

Jacobi. Berikut teorema yang digunakan.

Diberikan matriks Jacobian $J_{(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}$ dari suatu sistem persamaan diferensial nonlinear.

- a. Jika semua bagian real nilai eigen dari matriks $J_{(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}$ bernilai negatif, maka titik kesetimbangan $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ dari sistem nonlinear tersebut stabil asimtotik lokal.
 - b. Jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen dari matriks $J_{(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}$ bernilai positif, maka titik ekuilibrium $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ dari sistem nonlinear tersebut tidak stabil.
4. Simulasi numerik dan analisis sensitivitas R_0
Simulasi numerik dilakukan untuk memberikan gambaran geometris model yang mengambil kasus di Negara Haiti. Selanjutnya analisis sensitivitas R_0 dilakukan untuk mengetahui parameter yang dominan berpengaruh terhadap penyebaran kolera.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembentukan Model Matematika

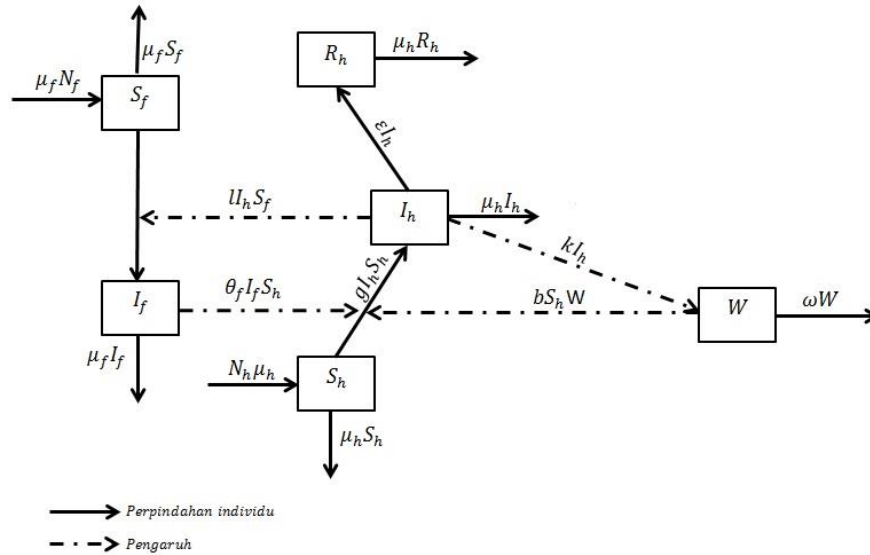
Model matematika yang disusun berdasarkan asumsi berikut. (1) Diasumsikan tingkat kelahiran alami dan kematian alami sama, tidak ada migrasi sehingga populasi tertutup, (2) populasi diasumsikan bercampur secara homogen, (3) individu terinfeksi bakteri kolera dan dapat menularkan bakteri ke individu rentan, air, dan lalat, (4) tidak ada reinfeksi terhadap individu yang pernah terkena kolera, (5) penyakit kolera dalam model ini diasumsikan tidak fatal, (6) lalat terinfeksi adalah lalat terinfeksi bakteri kolera dan dapat menularkan bakteri tersebut, (7) karena usia hidup lalat yang pendek diasumsikan tidak ada lalat sembuh.

Populasi lalat dibagi menjadi dua kompartemen, yaitu lalat rentan $S_f(t)$ dan lalat terinfeksi $I_f(t)$. Sedangkan populasi individu dibagi menjadi tiga kompartemen, yaitu individu rentan $S_h(t)$, individu terinfeksi $I_h(t)$, dan individu sembuh $R_h(t)$. Selanjutnya $W(t)$ adalah konsentrasi Bakteri *Vibrio cholerae* dalam air. Setiap individu yang lahir μ_h ataupun lalat yang lahir (μ_f) akan masuk ke dalam kompartemen rentan. Lalat rentan menjadi lalat terinfeksi akibat kontak dengan individu terinfeksi melalui feses atau sekresi individu terinfeksi dengan laju sebesar l .

Penyebaran penyakit kolera menular melalui air yang terkontaminasi feses manusia yang Bakteri *Vibrio Cholerae*, jabat tangan maupun makanan. Air yang terinfeksi oleh Bakteri *Vibrio Cholerae* yang digunakan untuk minum atau mandi dapat mengakibatkan penularan penyakit koler. Bakteri *Vibrio Cholerae* yang menempel pada tangan individu terinfeksi jika berjabat tangan dengan individu lain juga dapat menjadi cara penularan penyakit kolera. Makanan yang dihinggapi lalat terinfeksi kolera jika dimakan manusia juga akan menularkan penyakit kolera. Sehingga dalam model ini individu rentan tertular kolera akibat tiga cara, yaitu kontak antara individu rentan dengan yang terinfeksi dengan laju g , kontak antara individu rentan dengan air terkontaminasi dengan laju sebesar b , dan kontak antara individu rentan dengan lalat terinfeksi dengan laju δ_f . Setiap kompartemen akan mengalami kematian alami, baik individu maupun lalat. Individu terinfeksi

dapat menyebarkan Bakteri *Vibrio cholerae* ke dalam air dengan laju sebesar a . Individu terinfeksi dapat sembuh dengan laju kesembuhannya sebesar (ϵ) . Karena Bakteri *Vibrio cholerae* hanya dapat bertahan tiga minggu dalam air, maka bakteri tersebut dapat menghilang dengan laju sebesar ω .

Untuk penyederhanaan dimisalkan $S_f(t) = S_f$, $I_f(t) = I_f$, $S_h(t) = S_h$, $I_h(t) = I_h$, $R_h(t) = R_h$, dan $W(t) = W$. Berdasarkan asumsi model tersebut dapat dibentuk skema penyebaran penyakit kolera sebagai berikut.



Gambar 1. Diagram Transfer Penyebaran Penyakit Kolera

Berdasarkan diagram transfer Gambar 1 dapat dirumuskan model matematika berikut:

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_h &= N_h \mu_h - S_h \mu_h - g I_h S_h - b S_h W - \theta_f I_f S_h, \\
 \dot{I}_h &= g I_h S_h + b S_h W + \theta_f I_f S_h - \mu_h I_h - \epsilon I_h, \\
 \dot{R}_h &= \epsilon I_h - \mu_h R_h, \\
 \dot{S}_f &= N_f \mu_f - \mu_f S_f - I_h S_f, \\
 \dot{I}_f &= I_h S_f - \mu_f I_f, \\
 \dot{W} &= k I_h - \omega W.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

dengan nilai $N_h = S_h + I_h + R_h$ dan $N_f = S_f + I_f$. Model (1) dapat dibentuk dalam model non-dimensional menjadi:

$$\begin{aligned}
 \dot{s}_h &= \mu_h - \mu_h s_h - \tau s_h i_h - \delta_f i_f s_h - \beta s_h w, \\
 \dot{i}_h &= \tau s_h i_h + \delta_f i_f s_h + \beta s_h w - \mu_h i_h - \epsilon i_h, \\
 \dot{r}_h &= \epsilon i_h - \mu_h r_h, \\
 \dot{s}_f &= \mu_f - \mu_f s_f - c i_h s_f, \\
 \dot{i}_f &= c i_h s_f - \mu_f i_f, \\
 \dot{w} &= \omega (i_h - w),
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

dengan

$$s_h = \frac{S_h}{N_h}, i_h = \frac{I_h}{N_h}, r_h = \frac{R_h}{N_h}, s_f = \frac{S_f}{N_f}, i_f = \frac{I_f}{N_f}, w = \frac{\omega W}{k N_h}$$

$$\tau = gN_h, \delta_f = \theta_f N_f, \beta = \frac{bkN_h}{\omega}, c = lN_h.$$

Selanjutnya karena variabel r tidak memberikan pengaruh pada persamaan lain, sehingga sementara variable r dapat diabaikan.

$$\begin{aligned} \dot{s}_h &= \mu_h - \mu_h s_h - \tau s_h i_h - \delta_f i_f s_h - \beta s_h w, \\ \dot{i}_h &= \tau s_h i_h + \delta_f i_f s_h + \beta s_h w - \mu_h i_h - \varepsilon i_h, \\ \dot{s}_f &= \mu_f - \mu_f s_f - c i_h s_f, \\ \dot{i}_f &= c i_h s_f - \mu_f i_f, \\ \dot{w} &= \omega(i_h - w). \end{aligned} \tag{3}$$

Selanjutnya didefinisikan himpunan

$$\Gamma^* = \{(s_h, i_h, r_h, s_f, i_f, w) \in R_+^6 \mid s_h + i_h + r_h = 1, s_f + i_f = 1\}$$

dan

$$\Gamma = \{(s_h, i_h, s_f, i_f, w) \mid \exists r_h \leq 1 \ni (s_h, i_h, s_f, i_f, w) \in \Gamma^*\}$$

adalah himpunan invarian positif berturut-turut domain dari persamaan (2) dan (3).

Titik Kesetimbangan dan Bilangan Reproduksi Dasar

Berdasarkan (Perko, 2000) tentang titik kesetimbangan, maka titik kesetimbangan Sistem (3) diperoleh jika

$$\mu_h - \mu_h s_h - \tau s_h i_h - \delta_f i_f s_f - \beta s_h w = 0 \tag{4}$$

$$s_h i_h + \delta_f i_f s_f + \beta s_h w - \mu_h i_h - \varepsilon i_h = 0 \tag{5}$$

$$\mu_f - \mu_f s_f - c i_h s_f = 0 \tag{6}$$

$$c i_h s_f - \mu_f i_f = 0 \tag{7}$$

$$\omega(i_h - w) = 0. \tag{8}$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit ketika $i_h = i_f = 0$, sehingga diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit $\hat{E} = (1, 0, 1, 0, 0)$.

Selanjutnya, menentukan R_0 menggunakan metode matriks generasi selanjutnya (Diekmann et al., 2009; Van Den Driessche & Watmough, 2002) yaitu:

1. Linierisasi subsistem terinfeksi dalam hal ini i_h, i_f , dan w pada titik kesetimbangan bebas penyakit.

$$J_{(1,0,1,0,0)} = \begin{pmatrix} \tau - \mu_f - \varepsilon & \delta_f & \beta \\ c & -\mu_f & 0 \\ \omega & 0 & -\omega \end{pmatrix}. \tag{9}$$

2. Dekomposisi matriks Jacobi J menjadi matriks transmisi F dan matriks Transisi V

$$F = \begin{pmatrix} \tau & \delta_f & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} \mu_h + \varepsilon & 0 & 0 \\ -c & \mu_f & 0 \\ -\omega & 0 & \omega \end{pmatrix} V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_h + \varepsilon} & 0 & 0 \\ \frac{c}{\mu_f(\mu_h + \varepsilon)} & \frac{1}{\mu_f} & 0 \\ \frac{1}{(\mu_h + \varepsilon)} & 0 & \frac{1}{\omega} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

3. Hitung $R_0 = \rho(\mathbf{FV}^{-1})$

$$\mathbf{FV}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\tau\mu_f + \beta\mu_f + \delta_f c}{\mu_f(\mu_h + \varepsilon)} & \frac{\delta_f}{\mu_f} & \frac{\beta}{\omega} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Didapatkan persamaan karakteristik

$$(\lambda^2) \left(\lambda - \frac{\tau\mu_f + \beta\mu_f + \delta_f c}{\mu_f(\mu_h + \varepsilon)} \right) = 0 \quad (12)$$

Karena $R_0 = \rho(\mathbf{FV}^{-1})$, maka didapat

$$R_0 = \frac{\tau\mu_f + \beta\mu_f + \delta_f c}{\mu_f(\mu_h + \varepsilon)}$$

Teorema 1

Misalkan $\bar{E} = (\bar{s}_h, \bar{i}_h, \bar{s}_f, \bar{i}_f, \bar{w})$ adalah titik kesetimbangan endemik dari Sistem (3) dengan

$$\begin{aligned} \bar{s}_h &= \frac{\mu_h(\mu_f + c\bar{i}_h)}{(\mu_f + c\bar{i}_h)(\mu_h + \tau\bar{i}_h + \beta\bar{i}_h) + \delta_f c\bar{i}_h} \\ \bar{i}_h &= \frac{-B - \sqrt{(B^2 - 4AC)}}{2A} \\ \bar{s}_f &= \frac{\mu_f}{\mu_f + c\bar{i}_h} \\ \bar{i}_f &= \frac{c\bar{i}_h}{\mu_f + c\bar{i}_h} \\ \bar{w} &= \bar{i}_h. \end{aligned}$$

dengan

$$A = -c(\tau + \beta)(\mu_h + \varepsilon), B = (\tau + \beta)\mu_h c - (\mu_f(\tau + \beta) + c(\mu_h + \delta_f))(\mu_h + \varepsilon), C = \mu_h \mu_f (\mu_h + \varepsilon) (\mathcal{R}_0 - 1).$$

Jika $R_0 > 1$, maka titik kesetimbangan \bar{E} ada.

Bukti.

Titik kesetimbangan endemik yaitu ketika $i_h > 0$ dan $i_f > 0$. Substitusi $i_h > 0$ dan $i_f > 0$ ke (4) sd. (8) diperoleh titik kesetimbangan $\bar{E} = (\bar{s}_h, \bar{i}_h, \bar{s}_f, \bar{i}_f, \bar{w})$. Eksistensi titik kesetimbangan ditunjukkan dengan setiap elemennya positif. Diperhatikan bahwa $\bar{s}_h, \bar{s}_f, \bar{i}_f$, dan \bar{w} padasetiap elemen titik kesetimbangan \bar{E} positif jika \bar{i}_h positif, sehingga akan ditunjukkan \bar{i}_h positif. Diperhatikan bahwa

$$A = -c(\tau + \beta)(\mu_h + \varepsilon) < 0$$

dan jika $R_0 > 1$ maka $C > 0$, sehingga diperoleh \bar{i}_h positif. ■

Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Teorema 2

Jika $\mathcal{R}_0 < 1$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit $\hat{E} = (1,0,1,0,0)$ stabil asimtotik lokal.

Bukti.

Analisis kestabilan lokal $\hat{E} = (1,0,1,0,0)$ menggunakan analisis nilai eigen matriks Jacobian Sistem (3) di titik \hat{E} (Wiggins, 2003). Diperoleh matriks Jacobian Sistem (3)

$$J_{(1,0,1,0,0)} = \begin{pmatrix} -\mu_f & -\tau & 0 & -\delta_f & -\beta \\ 0 & \tau - \mu_h - \varepsilon & 0 & \delta_f & \beta \\ 0 & -c & -\mu_f & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & -\mu_f & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 & -\omega \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Persamaan karakteristik untuk $J_{(1,0,1,0,0)}$ adalah

$$(\lambda + \mu_h)(\lambda + \mu_f)P = 0 \tag{14}$$

dengan

$$P = \lambda^3 + (\omega + \mu_f - a)\lambda^2 + (\mu_f\omega - a\omega - a\mu_f + c\delta_f - \omega\beta)\lambda + (-a\mu_f\omega + c\delta_f\omega - \omega\beta\mu_f) \tag{15}$$

dan $a = \tau - \mu_h - \varepsilon$. Berdasarkan Persamaan Karakteristik (14) diperoleh $\lambda_1 = \mu_h, \lambda_2 = -\mu_f$. Penentuan tanda bagian riil untuk tiga nilai eigen Persamaan (15) dilakukan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Berdasarkan Persamaan (15) diperoleh

$$a_0 = 1, a_1 = \omega + \mu_f - a, a_2 = \mu_f\omega - a\omega - a\mu_f + c\delta_f - \omega\beta$$

dan $a_3 = -a\mu_f\omega + c\delta_f\omega - \omega\beta\mu_f$. Akan ditunjukkan jika $R_0 < 1$ maka $\frac{a_1}{a_0} > 0, \frac{a_2}{a_0} > 0$, dan $\frac{a_3}{a_0} > 0$. Perhatikan jika $R_0 < 1$, maka

$$\begin{aligned} \frac{\tau\mu_f + \beta\mu_f + \delta_f c}{\mu_f(\mu_h + \varepsilon)} &< 1 \\ \Leftrightarrow \delta_f c &< \mu_f\mu_h + \mu_f\varepsilon - \mu_f\tau - \mu_f\beta \\ \Leftrightarrow \frac{\delta_f c}{\mu_f} + \beta &< -a. \end{aligned} \tag{16}$$

Diketahui $\delta_f > 0, c > 0, \mu_f > 0, \beta > 0$, dan $\omega > 0$ berdasarkan Persamaan (16) maka haruslah $a < 0$, akibatnya $\frac{a_1}{a_0} > 0$. Kalikan persamaan (16) dengan ω diperoleh

$$\omega \frac{\delta_f c}{\mu_f} < -a\omega - \beta\omega. \tag{17}$$

Diketahui $\delta_f > 0, c > 0, \mu_f > 0, \beta > 0$ dan $\omega > 0$ akibatnya haruslah $-a\omega - \beta\omega > 0$. Karena $-a\omega - \beta\omega > 0$ dan $a < 0$, maka $\frac{a_2}{a_0} > 0$. Kalikan persamaan (17) dengan μ_f diperoleh

$$\omega\delta_f c < -a\mu_f\omega - \beta\mu_f\omega. \tag{18}$$

Diketahui $\delta_f > 0, c > 0, \omega > 0$ maka nilai $-a\mu_f\omega - \beta\mu_f\omega > 0$, akibatnya nilai $\frac{a_3}{a_0} > 0$.

Syarat Kriteria Routh-Hurwitz adalah determinan matriks Routh-Hurwitz Persamaan (15) bernilai positif. Matriks Routh-Hurwitz Persamaan (15) adalah

$$\Delta_1 = |a_1| = \omega + \mu_f - a,$$

$$\Delta_2 = \omega^2(\mu_f - a - \beta) + \mu_f(\omega\mu_f - a\mu_f + c\delta_f) + (a^2\mu_f + a^2\omega - a\delta_f) - 3a\omega\mu_f,$$

$$\Delta_3 = a_3 \Delta_2.$$

Karena $a < 0$, maka $\Delta_1 > 0$. Berdasarkan Persamaan (17) maka nilai $-a - \beta > 0$. Karena nilai $a < 0$ dan $-a - \beta > 0$, maka $\Delta_2 > 0$. Karena $\Delta_2 > 0$ dan nilai $a_3 > 0$, sehingga $\Delta_3 > 0$. Dengan demikian, determinan matriks Routh-Hurwitz Δ_1, Δ_2 , dan Δ_3 bernilai positif jika $R_0 < 1$. Persamaan (15) memenuhi semua kriteria Routh-Hurwitz, sehingga semua bagian real nilai eigen dari Polinomial (15) bernilai negatif jika $R_0 < 1$. Terbukti semua bagian real nilai eigen Persamaan (14) bernilai negatif, maka titik kesetimbangan $\hat{E} = (1, 0, 1, 0, 0)$ stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$. ■

Simulasi Numerik

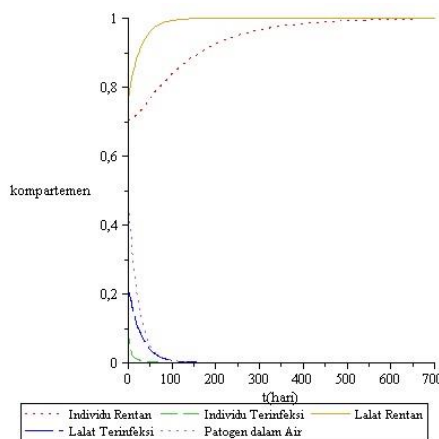
Berikut parameter yang digunakan dan mengambil kasus di Negara Haiti.

Tabel 1. Nilai-Nilai Parameter Model

No	Parameter	Definisi	Nilai	Satuan	Refrensi
1.	μ_h	Tingkat kelahiran alami dan kematian alami populasi individu	$7,599637537 \times 10^{-3}$	$(\text{km}^2 \text{ hari})^{-1}$	(World Health Rangking, 2015)
2.	μ_f	Tingkat kelahiran alami dan kematian alami populasi lalat	0,0357	$\frac{\text{lalat}}{\text{km}^2 \text{ hari}}$	(Khamesipour et al., 2018)
3.	τ	Laju kontak infeksi individu rentan dengan individu terinfeksi	$3,962668149 \times 10^{-6}$	$\frac{\text{km}^2}{\text{individu hari}}$	(Posny et al., 2015)
4.	δ_f	Laju kontak infeksi individu rentan dengan lalat terinfeksi	1×10^{-4}	$\frac{\text{km}^2}{\text{cell lalat hari}}$	(Brooks, 2010)
5.	β	Laju kontak infeksi individu rentan dengan air yang terkontaminasi bakteri	$5.253537301 \times 10^{-3}$	$\frac{\text{ml}}{\text{cell hari}}$	(Codeço, 2001)
6.	ϵ	Tingkat kesembuhan individu dari penyakit kolera	0,167	$\frac{\text{individu}}{\text{km}^2 \text{ hari}}$	(Lawley et al., 2012)
7.	c	Laju kontak infeksi lalat rentan dengan individu terinfeksi	$7,633587786 \times 10^{-8}$	$\frac{\text{km}^2}{\text{cell individu hari}}$	(Blow et al., 2005)
8.	ω	Laju penyebaran Bakteri Vibrio cholerae dari individu terinfeksi ke sumber air	0,048	$\frac{\text{cell km}^2}{\text{ml individu hari}}$	(Brooks, 2010)

dengan total jumlah individu adalah 360,242559 individu/km² (Luquero et al., 2016) dan total jumlah lalat adalah 2.438 lalat/km² (Marquez & Krafur, 2002).

Berdasarkan Tabel 1 $R_0 = 0,03011178686$. Karena $R_0 < 1$, akibatnya penyakit kolera di Haiti akan menghilang. Hal ini sejalan juga dengan simulasi numerik Gambar 2.



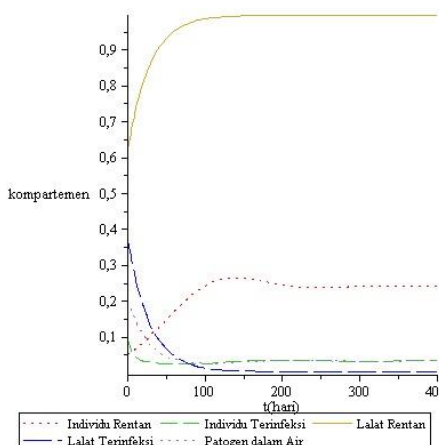
Gambar 2. Simulasi Sistem (4) titik kesetimbangan bebas penyakit \bar{E}

Berdasarkan Gambar 2 individu rentan dan lalat rentan stabil menuju 1 pada hari ke-650. Hal ini bermakna bahwa pada akhirnya setiap individu dan lalat akan menjadi tidak terinfeksi kolera. Populasi individu terinfeksi, lalat terinfeksi, dan pathogen dalam air menurun sampai hari ke-100 dan stabil pada titik tersebut. Hal ini menunjukkan bahwa penyakit akan menghilang dari populasi dan mendukung Teorema 2.

Selanjutnya dilakukan simulasi untuk mendukung Teorema 1 ($R_0 > 1$). Jika c dan τ , diperbesar 5×10^4 dari nilai parameter awal dan β diperbesar 1×10^2 dari nilai awal sehingga nilai $c = 3,816793893 \times 10^{-3}$ dan $\tau = 0,1981334075$, sedangkan $\beta = 0,5253537301$, maka diperoleh titik ekulibrium endemic

$$\bar{E}(0,2508983299; 0,03136162389; 0,9966582387; 3,341761263 \times 10^{-3}; 0,03136162389)$$

dan $\mathcal{R}_0 = 4,143706870$. Berikut hasil simulasi numerik berdasarkan parameter tersebut disajikan pada Gambar 3.



Gambar 3. Simulasi Sistem (4) titik kesetimbangan endemic \bar{E}

Berdasarkan Gambar 3 pada akhirnya individu rentan stabil pada titik 0,25 dan lalat rentan stabil pada titik 0,99. Populasi individu terinfeksi stabil pada titik 0,03, populasi lalat terinfeksi stabil pada titik 0,01 dan bakteri dalam air stabil pada titik 0,03. Hal ini menunjukkan bahwa penyakit akan tetap ada dalam populasi dan hal ini mendukung Teorema 1, bahwa titik kestabilan bebas edemik ada jika $R_0 > 1$.

Analisis Sensitifitas Bilangan Reproduksi Dasar

Berdasarkan Teorema 1 dan Teorema 2 nilai R_0 sangat berpengaruh dalam penyebaran penyakit kolera oleh karena itu perlu dianalisis parameter mana yang berpengaruh terhadap nilai R_0 . Sehingga pada bagian ini, akan dihitung indeks sensitivitas dari setiap parameter model yang berkorelasi dengan bilangan reproduksi dasar R_0 . Indeks ini memberikan informasi tentang pentingnya setiap parameter pada model yang mewakili penyebaran penyakit Kolera. Analisis sensitivitas terhadap bilangan reproduksi dasar dihitung menggunakan pendekatan oleh (Chitnis et al., 2008; Resmawan & Yahya, 2020). Akan dicari indeks sensitivitas R_0 terhadap parameter-parameter dalam penelitian ini yaitu pada Tabel 1.

Berikut diberikan contoh perhitungan indeks sensitivitas R_0 terhadap parameter β , untuk parameter lainnya analog.

$$C_{\beta}^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial \beta} \times \frac{\beta}{R_0} = \frac{\mu_f}{\mu_f(\mu_h + \varepsilon)} \times \frac{\beta\mu_f(\mu_h + \varepsilon)}{\tau\mu_f + \beta\mu_f + \delta_f c} = \frac{\beta}{\tau\mu_f + \beta\mu_f + \delta_f c}$$

Tabel 2. Sensitivitas Indeks Parameter Terhadap R_0

No.	Parameter	Sensitivitas Indeks
1.	τ	+0,9741185366
2.	ε	-0,9564739213
3.	μ_h	-0,0435260785
4.	β	+0,02582890049
5.	μ_f	-0,0000525633
6.	c	+0,00005256353
7.	δ_f	+0,00005256353

Tabel 2 menunjukkan sensitivitas indeks parameter terhadap penyebaran penyakit (R_0) dari yang paling berpengaruh sampai yang tidak berpengaruh. Secara umum terdapat dua parameter yang dominan berpengaruh terhadap R_0 yakni laju kontak individu rentan dengan terinfeksi (τ) dan tingkat kesembuhan penyakit kolera (ε). Sensitivitas indeks τ bernilai positif memiliki makna bahwa peningkatan nilai parameter τ berkontribusi pada peningkatan nilai R_0 atau sebaliknya, dengan catatan parameter lainnya konstan. Sensitivitas indeks ε bernilai negatif memiliki makna bahwa peningkatan nilai parameter ε memiliki kontribusi penurunan nilai R_0 atau sebaliknya, dengan catatan parameter lainnya konstan.

Berdasarkan nilai sensitivitas indeks pada Tabel 2 dapat disimpulkan faktor yang paling berpengaruh pada persebaran penyakit kolera adalah laju kontak antara individu rentan dengan terinfeksi dan tingkat kesembuhan dari penyakit kolera. Hal ini sesuai dengan hasil penelitian (Puspandari et al., 2010) yang meneliti KLB kolera di Papua, kontak dengan

individu terinfeksi memberi pengaruh besar terhadap persebaran kolera. Perlu diperhatikan bahwa parameter lainnya juga berpengaruh akan tetapi tidak signifikan dua parameter tersebut, sehingga tetap perlu diperhatikan. Sensitivitas indeks $C_{\tau}^{R_0} = +0,9741185366$ memiliki makna kenaikan (atau penurunan) nilai parameter τ misalkan 10% mengakibatkan kenaikan (atau penurunan) nilai R_0 sebesar 9,74%. Sensitivitas indeks $C_{\varepsilon}^{R_0} = -0,9564739213$ memiliki makna kenaikan (atau penurunan) nilai parameter ε misalkan 10% mengakibatkan penurunan (atau kenaikan) nilai R_0 sebesar 9,74%.

SIMPULAN DAN SARAN

Diperoleh model penyebaran penyakit kolera SIWR yang dikembangkan dengan menambahkan vektor lalat sebagai faktor penyebaran penyakit kolera berbentuk sistem persamaan diferensial non linear. Model matematika tersebut memiliki satu titik kestimbangan bebas penyakit $\hat{E} = (\hat{S}_h, \hat{I}_h, \hat{S}_f, \hat{I}_f, \hat{w})$ yang stabil asimtotik lokal saat $R_0 < 1$ dan satu titik kestimbangan endemik $\bar{E} = (\bar{S}_h, \bar{I}_h, \bar{S}_f, \bar{I}_f, \bar{w})$ yang eksis jika saat $R_0 > 1$. Hasil simulasi model yang mengambil kasus di Haiti menunjukkan penyakit kolera akan menghilang. Hasil analisis sensitivitas parameter-parameter model terhadap R_0 diperoleh dua parameter yang dominan berpengaruh terhadap R_0 yakni laju kontak individu rentan dengan terinfeksi dan tingkat kesembuhan dari penyakit kolera. Penelitian selanjutnya dapat menambahkan vektor hewan air sebagai pembawa bakteri kolera.

DAFTAR RUJUKAN

- Anggaraditya, B. A. (2015). Menekan Laju Penyebaran Kolera di Asia dengan 3SW (Sterilization, Sewage, Sources, and Water Purification). *Intisari Sains Medis*, 3(1), 83–87. <https://doi.org/10.15562/ism.v3i1.71>
- Basumatary, C., Kaur, R., & Kaur, S. (2021). Treatment Strategies Of Cholera: A Review. *European Journal of Translational and Clinical Medicine*, 7, 2020. https://www.researchgate.net/publication/348555388_Treatment_Strategies_of_Cholera_A_Review
- Blow, N. S., Salomon, R. N., Garrity, K., Reveillaud, I., Kopin, A., Jackson, F. R., & Watnick, P. I. (2005). *Vibrio cholerae* infection of *Drosophila melanogaster* mimics the human disease cholera. *PLoS Pathogens*, 1(1), 0092–0098. <https://doi.org/10.1371/journal.ppat.0010008>
- Brooks, G. F. , K. C. C. J. S. B. S. A. M. dan T. A. M. (2010). *Medical Microbiology, Twenty-Sixth edition*. McGraw-Hill Companies.
- Capasso, V., & Paveri-Fontana, S. L. (1979). A mathematical model for the 1973 cholera epidemic in the European Mediterranean region. *Revue d'épidémiologie et de Santé Publique*, 27(2), 121–132. <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/538301/>
- Chitnis, N., Hyman, J. M., & Cushing, J. M. (2008). Determining important parameters in the spread of malaria through the sensitivity analysis of a mathematical model. *Bulletin of Mathematical Biology*, 70(5), 1272–1296. <https://doi.org/10.1007/s11538-008-9299-0>

- Codeço, C. T. (2001). Endemic and epidemic dynamics of cholera: the role of the aquatic reservoir. *BMC Infectious Diseases*, 1(1), 1-14. <https://doi.org/10.1186/1471-2334-1-1>
- Diekmann, O., Heesterbeek, J. A. P., & Roberts, M. G. (2009). The construction of next-generation matrices for compartmental epidemic models. *Journal of the Royal Society, Interface / the Royal Society*, 7, 873-885. <https://doi.org/10.1098/rsif.2009.0386>
- Dolstad, H. A., Franke, M. F., Vissieres, K., Jerome, J.-G., Ternier, R., & Ivers, L. C. (2021). Factors associated with diarrheal disease among children aged 1-5 years in a cholera epidemic in rural Haiti. *PLOS Neglected Tropical Diseases*, 15(10), e0009726-. <https://doi.org/10.1371/journal.pntd.0009726>
- Filary-Szczepanik, M. (2020). The discipline in the times of Cholera. In *Global Affairs* (Vol. 6, Issue 3, pp. 243-246). Taylor & Francis. <https://doi.org/10.1080/23340460.2020.1842226>
- Ghosh, M., Chandra, P., Sinha, P., & Shukla, J. B. (2004). Modelling the spread of carrier-dependent infectious diseases with environmental effect. *Applied Mathematics and Computation*, 152(2), 385-402. [https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(03\)00564-2](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00564-2)
- Global Health Observatory (GHO) Data. (2015). *Cholera Cases Reported*. Http://Www.Who.Int/Gho/Epidemic.Diseases/Cholera/Epidemics_text/En/.
- Khamesipour, F., Lankarani, K. B., Honarvar, B., & Kwenti, T. E. (2018). A systematic review of human pathogens carried by the housefly (*Musca domestica* L.). *BMC Public Health*, 18(1). <https://doi.org/10.1186/s12889-018-5934-3>
- Lawley, R., Curtis, L., & Davis, J. (2012). *The food safety hazard guidebook*. Royal Society of Chemistry.
- Luquero, F., Rondy, M., Boncy, J., Munger, A., Mekaoui, H., Rymshaw, E., Page, A.-L., Toure, B., Degail, M. A., Nicolas, S., Grandesso, F., Ginsbourger, M., Polonsky, J., Alberti, K., Terzian, M., Olson, D., Porten, K., & Ciglencski, I. (2016). Mortality Rates during Cholera Epidemic, Haiti, 2010-2011. *Emerging Infectious Disease Journal*, 22(3), 410. <https://doi.org/10.3201/eid2203.141970>
- Manaqib, M., Fauziah, I., & Mujiyanti, M. (2019). Mathematical Model for MERS-COV Disease Transmission with Medical Mask Usage and Vaccination. *InPrime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1(2), 30-42. <https://doi.org/10.15408/inprime.v1i2.13553>
- Marquez, J. G., & Krafur, E. S. (2002). Gene flow among geographically diverse housefly populations (*Musca domestica* L.): a worldwide survey of mitochondrial diversity. *Journal of Heredity*, 93(4), 254-259. <https://doi.org/10.1093/jhered/93.4.254>
- Najar, A. M., Sudarsana, I. W., Albab, M. U., & Andhika, S. (2022). Machine Learning untuk Identifikasi Jenis Kanker Darah (Leukemia). *Vygotsky: Jurnal Pendidikan Matematika Dan Matematika*, 4(1), 47-56.

- <https://doi.org/10.30736/voj.v4i1.493>
- Perko, L. (2000). *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer.
- Posny, D., Wang, J., Mukandavire, Z., & Modnak, C. (2015). Analyzing transmission dynamics of cholera with public health interventions. *Mathematical Biosciences*, 264, 38–53. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2015.03.006>
- Pourabbas, E., d'Onofrio, A., & Rafanelli, M. (2001). A method to estimate the incidence of communicable diseases under seasonal fluctuations with application to cholera. *Applied Mathematics and Computation*, 118(2–3), 161–174. [https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(99\)00212-X](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(99)00212-X)
- Puspandari, N., Sariadji, K., & Wati, M. (2010). IDENTIFIKASI PENYEBAB KEJADIAN LUAR BIASA KOLERA DI PAPUA TERKAIT KONTAK JENAZAH DAN SANITASI. *Widyariset*, 13(2). <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.14203/widyariset.13.2.2010.69-74>
- Resmawan, R., & Yahya, L. (2020). Sensitivity Analysis of Mathematical Model of Coronavirus Disease (COVID-19) Transmission. *Cauchy*, 6(2), 91. <https://doi.org/10.18860/ca.v6i2.9165>
- Robertson, S. L., Eisenberg, M. C., & Tien, J. H. (2013). Heterogeneity in multiple transmission pathways: Modelling the spread of cholera and other waterborne disease in networks with a common water source. *Journal of Biological Dynamics*, 7(1), 254–275. <https://doi.org/10.1080/17513758.2013.853844>
- Silva, A. J., & Benitez, J. A. (2016). *Vibrio cholerae* Biofilms and Cholera Pathogenesis. *PLOS Neglected Tropical Diseases*, 10(2), e0004330. <https://doi.org/10.1371/journal.pntd.0004330>
- Tien, J. H., & Earn, D. J. D. (2010). Multiple transmission pathways and disease dynamics in a waterborne pathogen model. *Bulletin of Mathematical Biology*, 72(6), 1506–1533. <https://doi.org/10.1007/s11538-010-9507-6>
- Van den Driessche, P., & Watmough, J. (2002). Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*, 180(1–2), 29–48. [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(02\)00108-6](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00108-6)
- Wiggins, S. (2003). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* (second). Springer.
- World Health Rankings. (2015). *Health Profile: Haiti*. [Http://www.worldlifeexpectancy.com/country-health-profile/haiti](http://www.worldlifeexpectancy.com/country-health-profile/haiti).
- Yahya, L., Nurwan, N., & Resmawan, R. (2022). Menentukan Waktu Optimal untuk Pembuatan Kerajinan Sulaman Karawo Menggunakan Aljabar Max-Plus. *Vygotsky: Jurnal Pendidikan Matematika Dan Matematika*, 4(1), 23–34. <https://doi.org/10.30736/voj.v4i1.442>