Vygotsky: Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika
Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Islam Lamongan
http://jurnalpendidikan.unisla.ac.id/index.php/VoJ

E-ISSN: 2656-5846
P-ISSN: 2656-2286
Vol. 4 (1)
Februari 2022
pp. 35-46

Simetrisasi Aljabar Min-Plus

Min-Plus Algebra Symmetrization

Suroto Suroto[1*]

[1] Jurusan Matematika, Universitas Jenderal Soedirman

**Email Korespondensi:* suroto@unsoed.ac.id

Info Artikel

Diterima : 11 Okt 21
Direvisi : 10 Nov 21
Diterbitkan : 07 Feb 22

Kata Kunci:

Aljabar Min-Plus, Setimbang, Simetrisasi, Negatif

Abstract

In this paper, we discuss symmetrization in min-plus algebra. This study aims to construct a negative and balanced form of each element in min-plus algebra. The research method adopted from max-plus algebra extension into symmetrized max-plus algebra. The results are negative and balanced forms of the elements in min-plus algebra, which can be analogous to negative and zero forms in conventional algebra. These results can potentially be used to solve the addition inverse problem in min-plus algebra.

Cara merujuk artikel ini:

Suroto, S. (2022). Simetri Aljabar Min-Plus. *Vygotsky: Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika*, 4 (1), 35-46. Diunduh dari https://jurnalpendidikan.unisla.ac.id/index.php/VoJ/article/view/444

Abstrak

Pada makalah ini dibahas simetrasasi pada aljabar min-plus. Tujuan dari penelitian ini adalah mengonstruksi bentuk negatif dan setimbang dari setiap elemen pada aljabar min-plus. Metode penelitian mengadopsi dari cara perluasan aljabar max-plus menjadi aljabar max-plus tersimetri. Hasil penelitian adalah bentuk negatif dan setimbang dari elemen-elemen pada aljabar min-plus, yang dapat dianalogikan sebagai bentuk negatif dan nol pada aljabar konvesional. Hasil ini berpotensi dapat digunakan untuk mengatasi masalah invers penjumlahan pada aljabar min-plus.

E-ISSN: *2656-5846*
P-ISSN: *2656-2286*

PENDAHULUAN

Misalkan $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan riil. Aljabar min-plus adalah himpunan $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dengan operasi penjumlahannya adalah "minimum" dan perkaliannya adalah "penjumlahan biasa" (Watanabe & Watanabe, 2014). Untuk selanjutnya, aljabar min-plus dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{\min}$ dan untuk setiap $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_{\min}$, $p_1 \oplus p_2 = \min(p_1, p_2)$ dan $p_1 \otimes p_2 = p_1 + p_2$. Struktur aljabar yang terbentuk dari aljabar min-plus adalah semiring komutatif idempoten dengan $\mathcal{E} = \infty$ dan $e = 0$ berturut-turut merupakan elemen nol dan satuan pada $\mathbb{R}_{\min}$. Setiap elemen pada $\mathbb{R}_{\min}$ kecuali $\mathcal{E}$, tidak memiliki invers penjumlahan. Apabila operasi penjumlahan didefinisikan dengan $p_1 \oplus p_2 = \max(p_1, p_2)$, maka struktur yang terbentuk dinamakan sebagai aljabar max-plus dan dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{\max}$.

Pada pembahasan aljabar linier, penyelesaian persamaan $x + 2 = 0$ adalah $x = -2$. Sementara pada pembahasan aljabar min-plus, persamaan $x \oplus 2 = \mathcal{E}$ tidak memiliki penyelesaian pada $\mathbb{R}_{\min}$. Hal ini dikarenakan $2 \in \mathbb{R}_{\min}$ tidak memiliki invers terhadap operasi penjumlahan. Dengan demikian, permasalahan invers penjumlahan ini akan mempengaruhi penyelesaian sistem persamaan linier atas $\mathbb{R}_{\min}$.

Penelitian mengenai sistem persamaan linier atas $\mathbb{R}_{\min}$ sudah banyak dilakukan. Karena permasalahan invers penjumlahan pada $\mathbb{R}_{\min}$ maka penyelesaian pada sistem persamaan linier tersebut hanya berupa subsolusi. Penelitian tentang solusi maksimal dari sistem persamaan linier atas $\mathbb{R}_{\min}$ sudah dilakukan (Jamshidvand et al., 2019). Beberapa penggunaan sistem persamaan linier atas $\mathbb{R}_{\min}$ pada kehidupan sehari-hari sudah dibahas, antara lain pada pemodelan rute tercepat distribusi susu (Suwanti et al., 2017), sistem jaringan siber fisik (Li & Zhao, 2012), pada model rambu lalu lintas dengan aljabar min-plus dan petri net (Farhi, 2009) dan simulasi produksi susu dengan petri net (Pramesthi, 2021).

Aljabar max-plus tersimetri $\mathbb{S}$ merupakan perluasan dari $\mathbb{R}_{\max}$. Perluasan ini dilakukan dengan mengadopsi perluasan himpunan bilangan asli menjadi himpunan bilangan bulat, dengan menentukan negatif dari bilangan asli dan nol. Salah satu kajian mengenai perluasan bilangan asli menjadi bilangan bulat dilakukan oleh (Marjanovic, 2018). Penelitian mengenai perluasan $\mathbb{R}_{\max}$ menjadi $\mathbb{S}$ sudah dilakukan antara lain (Akian et al., 1990), (De Schutter, 1996), (Baccelli et al., 2001) dan (De Schutter & De Moor, 2002). Pada artikel ini, disajikan simetrisasi pada $\mathbb{R}_{\min}$ untuk memperoleh bentuk negatif dan setimbang dari setiap elemen pada $\mathbb{R}_{\min}$. Proses simetrisasi ini dilakukan dengan mengadopsi relasi setimbang pada aljabar max-plus tersimetri. Perbedaan operasi dasar pada pendefinisian operasi penjumlahan aljabar max-plus dan aljabar min-plus akan banyak berpengaruh pada langkah-langkah yang dilakukan. Hasil yang diperoleh pada artikel ini berpotensi untuk mengatasi masalah invers penjumlahan yang terjadi pada aljabar min-plus. Selain itu juga berpotensi dapat digunakan untuk memperbaiki sub solusi pada sistem persamaan linier atas $\mathbb{R}_{\min}$.

E-ISSN: 2656-5846
P-ISSN: 2656-2286

METODE

Penelitian ini adalah studi literatur yang sifatnya mengembangkan penelitian yang sudah ada sebelumnya, yakni masalah invers penjumlahan pada aljabar min-plus. Pada penelitian ini dibahas tentang simetrisasi aljabar min-plus untuk menentukan negatif dan setimbang yang akan digunakan peranannya seperti invers pada aljabar linier. Proses simetrisasi aljabar min-plus dilakukan dengan mengadopsi perluasan himpunan bilangan asli menjadi himpunan bilangan bulat pada (Marjanovic, 2018) dan perluasan dari $\mathbb{R}_{\max}$ menjadi $\mathbb{S}$ pada (Baccelli et al., 2001).

Adapun prosedur langkah yang dilakukan adalah:

1. Melakukan studi pustaka tentang aljabar min-plus dan permasalahan invers penjumlahan pada aljabar min-plus.
2. Membentuk himpunan pasangan terurut $\mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ dan menunjukkan struktur aljabar yang terbentuk dari sistem matematikanya.
3. Mendefisikan operator minus dan setimbang pada $\mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ serta suatu relasi ekuivalensi pada $\mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ merujuk pada (Baccelli et al., 2001).
4. Menentukan kelas-kelas ekuivalensi yang diperoleh berdasarkan langkah 3 yang merupakan hasil proses simetrisasi.
5. Menentukan bentuk negatif dan setimbang dari hasil pada langkah 4, dengan mengadopsi bentuk negatif dan nol pada (Marjanovic, 2018).
6. Menentukan beberapa sifat terkait dengan hasil simetrisasi aljabar min-plus.

BAHASAN UTAMA

Aljabar Min-Plus

Pada bagian ini disajikan pembahasan aljabar min-plus dan beberapa sifat yang terkait dengan aljabar min-plus. Pembahasan tentang terminologi dasar aljabar min-plus merujuk pada beberapa literatur, yakni (Spalding, 1998), (Speyer & Sturmfels, 2004), (Litvinov et al., 2012) dan (Zanardo et al., 2016).

Pada awal pembahasan ini, terlebih dahulu didefinisikan pengertian semiring yang akan digunakan untuk menentukan struktur aljabar dari aljabar min-plus.

Definisi 1 (Golan, 2005)
Diberikan S himpunan tak kosong. Semiring adalah sistem matematika $(S,+,\times)$ *yang memenuhi* $(S,+)$ *merupakan semigrup abel yang memiliki elemen nol,* $(S,\times)$ *merupakan semigrup yang memiliki elemen satuan, elemen nol merupakan penyerap terhadap* $\times$ *dan sifat distributif* $\times$ *terhadap* $+$.

Apabila operasi $\times$ bersifat komutatif maka S adalah semiring komutatif, dan apabila operasi $+$ bersifat idempoten maka S adalah semiring idempoten. Semilapangan adalah semiring komutatif dengan semua elemen selain nol memiliki invers perkalian.

Aljabar min-plus adalah suatu sistem matematika yang berbentuk

E-ISSN: 2656-5846
P-ISSN: 2656-2286

$\mathbb{R}_{\min} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dengan operasi penjumlahannya adalah "minimum" dan operasi perkaliannya adalah "penjumlahan biasa", dan dapat dituliskan untuk setiap $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_{\min}$ sebagai berikut.

$$p_1 \oplus p_2 = \min(p_1, p_2)$$
$$p_1 \otimes p_2 = p_1 + p_2$$

Selanjutnya, untuk setiap $p \in \mathbb{R}_{\min}$ didefinisikan $\min(p, \infty) = p$ dan $p + \infty = \infty$. Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada aljabar min-plus, masing-masing bersifat komutatif yakni untuk setiap $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_{\min}$.

$$p_1 \oplus p_2 = p_2 \oplus p_1$$
$$p_1 \otimes p_2 = p_2 \otimes p_1$$

Selanjutnya, operasi $\oplus$ dan $\otimes$ masing-masing juga bersifat assosiatif yakni untuk setiap $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}_{\min}$ adalah sebagai berikut.

$$(p_1 \oplus p_2) \oplus p_3 = p_1 \oplus (p_2 \oplus p_3)$$
$$(p_1 \otimes p_2) \otimes p_3 = p_1 \otimes (p_2 \otimes p_3)$$

Sifat distributif operasi $\otimes$ terhadap $\oplus$ juga dipenuhi yakni untuk setiap $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}_{\min}$ adalah sebagai berikut.

$$p_1 \otimes (p_2 \oplus p_3) = (p_1 \otimes p_2) \oplus (p_1 \otimes p_3)$$
$$(p_1 \oplus p_2) \otimes p_3 = (p_1 \otimes p_3) \oplus (p_2 \otimes p_3)$$

Pada aljabar min-plus berlaku $p \oplus \infty = \infty \oplus p = p$, untuk setiap $p \in \mathbb{R}_{\min}$. Dengan demikian, ∞ adalah elemen identitas penjumlahan (elemen nol) dan selanjutnya dinotasikan dengan $\mathcal{E} = \infty$. Selain itu, untuk setiap $p \in \mathbb{R}_{\min}$ berlaku $p \otimes 0 = 0 \otimes p = p$, sehingga 0 merupakan elemen identitas perkalian (elemen satuan) terhadap operasi $\otimes$ dan selanjutnya dinotasikan dengan e= 0. Elemen nol merupakan elemen absorbsi (*absorbent*) terhadap perkalian yakni untuk setiap $p \in \mathbb{R}_{\min}$ berlaku

$$p \otimes \mathcal{E} = \mathcal{E} \otimes p = \mathcal{E}$$

Suatu operasi dikatakan bersifat idempoten apabila setiap elemen dioperasikan terhadap dirinya sendiri akan selalu menghasilkan elemen itu sendiri. Operasi $\oplus$ pada aljabar min-plus bersifat idempoten dikarenakan untuk setiap $p \in \mathbb{R}_{\min}$ berlaku $p \oplus p = \max(p, p) = p$. Berikut diberikan sistem matematika yang terbentuk dari $\mathbb{R}_{\min}$ dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$.

Teorema 1 (Litvinov et al., 2012)
Sistem matematika ($\mathbb{R}_{\min}$,$\oplus$,$\otimes$) *adalah semilapangan idempoten.*

Bukti. Diperhatikan bahwa ($\mathbb{R}_{\min}$,$\oplus$) adalah semigrup abel yang elemen nolnya $\mathcal{E} = \infty$. Selanjutnya, ($\mathbb{R}_{\min}$,$\otimes$) merupakan semigrup yang elemen satuannya $e = 0$. Elemen nol merupakan elemen absorbsi terhadap operasi $\otimes$. Sifat distributif operasi $\otimes$ terhadap operasi $\oplus$ serta sifat idempoten operasi $\oplus$ juga terpenuhi. Setiap elemen $p \in \mathbb{R}_{\min}$ dengan $p \neq \mathcal{E}$, memiliki invers perkalian yakni $p^{-1} = -p \in \mathbb{R}_{\min}$ sedemikian hingga $p \otimes p^{-1} = p^{-1} \otimes p = e$. Dengan demikian, sistem matematika ($\mathbb{R}_{\min}$,$\oplus$,$\otimes$) adalah semilapangan idempoten. ∎

Berdasarkan Teorema 1, salah satu perbedaan utama dari aljabar min-plus dengan aljabar linier adalah tidak adanya elemen invers terhadap operasi penjumlahan, terkecuali untuk elemen nol. Apabila diberikan $p \in \mathbb{R}_{\min}$ dengan $p \neq \mathcal{E}$ maka tidak ada $q \in \mathbb{R}_{\min}$ yang memenuhi $p \oplus q = \mathcal{E}$. Pada aljabar min-plus, definisi perpangkatan dilakukan mirip seperti aljabar konvensional (aljabar linier). Untuk setiap $p \in \mathbb{R}_{\min}$ dan k adalah bilangan asli maka didefinisikan sebagai berikut.

$$p^k = \underbrace{p \otimes p \otimes \dots \otimes p}_{k\ kali}.$$

Selanjutnya, p^k akan berkorespondensi dengan kp pada aljabar konvensional. Hal ini dikarenakan

$$p^k = \underbrace{p \otimes p \otimes \dots \otimes p}_{k\ kali} = \underbrace{p + p + \cdots + p}_{k\ kali} = kp.$$

Simetrisasi pada Aljabar Min-Plus

Pada bagian ini disajikan proses simetrisasi dari aljabar min-plus, untuk menentukan bentuk negatif dan setimbang dari elemen-elemen pada aljabar min-plus. Proses simetrisasi diawali dengan membentuk himpunan pasangan terurut $\mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ dan menentukan struktur aljabar yang terbentuk dari sistem matematikanya. Selanjutnya, didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian pada $\mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ yakni untuk setiap $(p_1, p_2), (q_1, q_2) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ adalah sebagai berikut.

$$(p_1, p_2) \oplus (q_1, q_2) = (p_1 \oplus q_1, p_2 \oplus q_2) \quad (1)$$

$$(p_1, p_2) \otimes (q_1, q_2) = (p_1 \otimes q_1 \oplus p_2 \otimes q_2, p_1 \otimes q_2 \oplus p_2 \otimes q_1) \quad (2)$$

Untuk setiap $p_1, q_1 \in \mathbb{R}_{\min}$ berlaku

$$(p_1, -\infty) \oplus (q_1, -\infty) = (p_1 \oplus q_1, -\infty) \quad (3)$$

$$(p_1, -\infty) \otimes (q_1, -\infty) = (p_1 \otimes q_1, -\infty) \quad (4)$$

Maka operasi (1) dan (2) yang didefinisikan pada $\mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ berkorespondensi dengan operasi (3) dan (4) yang didefinisikan pada $\mathbb{R}_{\min}$. Berikut diberikan suatu teorema yang menjelaskan struktur aljabar dari $\mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ dengan operasi pada (1) dan (2).

Teorema 2

Sistem matematika $(\mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}, \oplus, \otimes)$ *merupakan suatu semiring idempoten komutatif*

Bukti. Perhatikan bahwa $(\mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}, \oplus)$ merupakan suatu semigrup komutatif dengan elemen nol $(\mathcal{E}, \mathcal{E})$. Selanjutnya, operasi $\oplus$ bersifat idempotent, dikarenakan untuk setiap $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ berlaku

$$(p_1, p_2) \oplus (p_1, p_2) = (p_1 \oplus p_1, p_2 \oplus p_2) = (p_1, p_2).$$

Sementara itu, $(\mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}, \otimes)$ merupakan suatu semigrup dengan elemen satuan $(e, \mathcal{E})$. Operasi $\otimes$ bersifat komutatif untuk setiap $(p_1, p_2), (q_1, q_2) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ karena

$$(p_1, p_2) \otimes (q_1, q_2) \quad = (p_1 \otimes q_1 \oplus p_2 \otimes q_2, p_1 \otimes q_2 \oplus p_2 \otimes q_1)$$

E-ISSN: 2656-5846
P-ISSN: 2656-2286

$$= (q_1 \otimes p_1 \oplus q_2 \otimes p_2, q_2 \otimes p_1 \oplus q_1 \otimes p_2)$$
$$= (q_1 \otimes p_1 \oplus q_2 \otimes p_2, q_1 \otimes p_2 \oplus q_2 \otimes p_1)$$
$$= (q_1, q_2) \otimes (p_1, p_2)$$

Elemen nol adalah elemen penyerap untuk operasi perkalian dikarenakan

$$(p_1, p_2) \otimes (\mathcal{E}, \mathcal{E}) = (\mathcal{E}, \mathcal{E}) \otimes (p_1, p_2) = (\mathcal{E}, \mathcal{E}).$$

untuk setiap $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$. Selain itu, operasi $\otimes$ distributif terhadap operasi $\oplus$. Berdasarkan penguraian ini diperoleh bahwa ($\mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$,$\oplus$,$\otimes$) adalah semiring komutatif idempoten. ∎

Berikut contoh untuk menjelaskan penjumlahan dan perkalian pada $\mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$.

Contoh:
Misalkan diambil $(-4,3), (e, -1) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ maka

$$(-4,3) \oplus (e, -1) = (-4 \oplus e, 3 \oplus -1) = (-4, -1)$$
$$(-4,3) \otimes (e, -1) = (-4 \otimes e \oplus 3 \otimes -1, -4 \otimes -1 \oplus 3 \otimes e) = (-4, -5).$$ ∎

Selanjutnya didefinisikan operator-operator pada $\mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ yang akan digunakan untuk proses simetrisasi. Operator-operator dan sifat-sifat ini mengadopsi dari (Baccelli et al., 2001).

Definisi 2
Untuk $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}_{min} \times \mathbb{R}_{min}$ *didefinisikan*
1. *Harga mutlak dari* (p_1, p_2) *yakni* $|(p_1, p_2)|_{\oplus} = p_1 \oplus p_2$
2. *Minus dari* (p_1, p_2) *yakni* $\ominus (p_1, p_2) = (p_2, p_1)$
3. *Setimbang dari* (p_1, p_2) *yakni* $(p_1, p_2)^{\bullet} = (p_1, p_2) \oplus \left(\ominus (p_1, p_2)\right) = \left(|(p_1, p_2)|_{\oplus}, |(p_1, p_2)|_{\oplus}\right)$

Berikut diberikan contoh untuk menjelaskan pengertian operator-operator pada Definisi 2.

Contoh:
Misalkan diambil $(3,0) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ maka

1. $|(3,0)|_{\oplus} = 3 \oplus 0 = 0$
2. $\ominus (3,0) = (0,3)$
3. $(3,0)^{\bullet} = \left(|(3,0)|_{\oplus}, |(3,0)|_{\oplus}\right) = (0,0)$ ∎

Selanjutnya diberikan teorema yang menjelaskan beberapa sifat yang berkaitan operator-operator pada Definisi 2.

Teorema 3
Untuk setiap $(p_1, p_2), (q_1, q_2) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ *berlaku*

1. $(p_1, p_2)^{\bullet} = (\ominus (p_1, p_2))^{\bullet} = ((p_1, p_2)^{\bullet})^{\bullet}$
2. $(p_1, p_2) \otimes (q_1, q_2)^{\bullet} = \left((p_1, p_2) \otimes (q_1, q_2)\right)^{\bullet}$
3. $\ominus \left(\ominus (p_1, p_2)\right) = (p_1, p_2)$
4. $\ominus \left((p_1, p_2) \oplus (q_1, q_2)\right) = \left(\ominus (p_1, p_2)\right) \oplus \left(\ominus (q_1, q_2)\right)$
5. $\ominus \left((p_1, p_2) \otimes (q_1, q_2)\right) = \ominus (p_1, p_2) \otimes (q_1, q_2)$

Vygotsky: Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika
https://doi.org/10.30736/voj.v4i1.444

Bukti.

1. Karena $\ominus (p_1, p_2) = (p_2, p_1)$ maka$(\ominus (p_1, p_2))^\bullet = (p_2 \oplus p_1, p_2 \oplus p_1) = (p_1 \oplus p_2, p_1 \oplus p_2) = (p_1, p_2)^\bullet$. Selanjutnya,

$$\begin{aligned}((p_1, p_2)^\bullet)^\bullet &= (p_1 \oplus p_2, p_1 \oplus p_2)^\bullet \\ &= (p_1 \oplus p_2 \oplus p_1 \oplus p_2, p_1 \oplus p_2 \oplus p_1 \oplus p_2) \\ &= (p_1 \oplus p_2, p_1 \oplus p_2) = (p_1, p_2)^\bullet\end{aligned}$$

Dengan demikian $(p_1, p_2)^\bullet = \big(\ominus (p_1, p_2)\big)^\bullet = ((p_1, p_2)^\bullet)^\bullet$

2. $(p_1, p_2) \otimes (q_1, q_2)^\bullet$
$= (p_1, p_2) \otimes (q_1 \oplus q_2, q_1 \oplus q_2)$
$= \big(p_1 \otimes (q_1 \oplus q_2) \oplus p_2 \otimes (q_1 \oplus q_2), p_1 \otimes (q_1 \oplus q_2) \oplus p_2 \otimes (q_1 \oplus q_2)\big)$
$= \big((p_1 \otimes q_1 \oplus p_1 \otimes q_2) \oplus (p_2 \otimes q_1 \oplus p_2 \otimes q_2), (p_1 \otimes q_1 \oplus p_1 \otimes q_2) \oplus (p_2 \otimes q_1 \oplus p_2 \otimes q_2)\big)$
$= \big((p_1 \otimes q_1 \oplus p_2 \otimes q_2), (p_1 \otimes q_2 \oplus p_2 \otimes q_1)\big)^\bullet$
$= \big((p_1, p_2) \otimes (q_1, q_2)\big)^\bullet$

3. $\ominus \big(\ominus (p_1, p_2)\big) = \ominus (p_2, p_1) = (p_1, p_2)$
4. $\big(\ominus (p_1, p_2)\big) \oplus \big(\ominus (q_1, q_2)\big)$
$= (p_2, p_1) \oplus (q_2, q_1)$
$= (p_2 \oplus q_2, p_1 \oplus q_1)$
$= \ominus (q_2 \oplus p_2, q_1 \oplus p_1)$
$= \ominus ((p_1, p_2) \oplus (q_1, q_2))$

5. $\ominus \big((p_1, p_2) \otimes (q_1, q_2)\big)$
$= \ominus (p_1 \otimes q_1 \oplus p_2 \otimes q_2 , p_1 \otimes q_2 \oplus p_2 \otimes q_1)$
$= (p_1 \otimes q_2 \oplus p_2 \otimes q_1, p_1 \otimes q_1 \oplus p_2 \otimes q_2)$
$= (p_2 \otimes q_1 \oplus p_1 \otimes q_2 , p_2 \otimes q_2 \oplus p_1 \otimes q_1)$
$= (p_2, p_1) \otimes (q_1, q_2) = \ominus (p_1, p_2) \otimes (q_1, q_2)$. ■

Operator $\ominus$ pada $\mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ memiliki sifat pada operator – pada himpunan bilangan riil, sehingga $\ominus$ pada $\mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ dapat difikirkan sebagai analogi – pada himpunan bilangan riil. Diperhatikan bahwa pada aljabar konvensional, untuk semua p berlaku $p - p = 0$, tetapi pada $\mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ hanya berlaku $(p_1, p_2) \ominus (p_1, p_2) = (p_1, p_2)^\bullet \neq (\mathcal{E}, \mathcal{E})$.

Selanjutnya didefinisikan relasi setimbang pada $\mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ yang diadopsi dari (Baccelli et al., 2001).

Definisi 3

Misalkan $(p_1, p_2), (q_1, q_2) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ *maka* (p_1, p_2) *dikatakan berelasi setimbang dengan* (q_1, q_2) *(dinotasikan dengan* $(p_1, p_2) \nabla (q_1, q_2)$*) apabila* $p_1 \oplus q_2 = p_2 \oplus q_1$.

Diperhatikan bahwa relasi setimbang pada $\mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ bersifat:
1. Refleksif, karena untuk semua $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ berlaku $p_1 \oplus q_2 = q_2 \oplus p_1$. Jadi $(p_1, p_2) \nabla (p_1, p_2)$.
2. Simetris, karena untuk semua $(p_1, p_2), (q_1, q_2) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ dengan $(p_1, p_2) \nabla (q_1, q_2)$ maka mengakibatkan $q_1 \oplus p_2 = q_2 \oplus p_1$. Jadi $(q_1, q_2) \nabla (p_1, p_2)$.

E-ISSN: 2656-5846
P-ISSN: 2656-2286

3. Tidak bersifat transitif. Misal diambil $(3,0),(0,0),(0,1) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ maka $(3,0) \nabla (0,0)$ dan $(0,0) \nabla (0,1)$ tetapi $(3,0) \not\nabla (0,1)$. Dengan demikian relasi setimbang bukan merupakan relasi ekuivalensi pada $\mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ sehingga tidak bisa dibentuk kuosien-kuosien $\mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ atas relasi setimbang tersebut.

Selanjutnya didefinisikan relasi lainnya pada $\mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ dan masih berhubungan dengan relasi setimbang yakni relasi $\mathcal{B}$ dengan definisi berikut.

Definisi 4
Misalkan $(p_1,p_2),(q_1,q_2) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ *maka* (p_1,p_2) *dikatakan beralasi* $\mathcal{B}$ *dengan* (q_1,q_2) *(dinotasikan dengan* $(p_1,p_2)\ \mathcal{B}\ (q_1,q_2)$ *) yakni*

$$(p_1,p_2)\mathcal{B}(q_1,q_2) \text{ apabila } \begin{cases} (p_1,p_2) \nabla (q_1,q_2), & untuk\ p_1 \neq p_2\ dan\ q_1 \neq q_2 \\ (p_1,p_2) = (q_1,q_2), & untuk\ lainnya \end{cases}$$

Diperhatikan bahwa $(p_1,p_2) = (q_1,q_2)$ jika dan hanya jika $p_1 = q_1, p_2 = q_2$. Dengan demikian, relasi $\mathcal{B}$ merupakan suatu relasi ekuivalensi. Cermati kembali bahwa $(3,0)\nabla(0,0)$ tetapi $(3,0)$ tidak berelasi $\mathcal{B}$ dengan $(0,0)$. Begitu juga $(0,0)\nabla(0,1)$, akan tetapi $(0,0)$ tidak berelasi $\mathcal{B}$ dengan $(0,1)$. Selanjutnya $(p_1,p_2) \ominus (p_1,p_2) = (p_1,p_2)^{\bullet} \nabla (\mathcal{E},\mathcal{E})$, tetapi $(p_1,p_2)^{\bullet}$ tidak berelasi $\mathcal{B}$ dengan $(\mathcal{E},\mathcal{E})$, terkecuali untuk $(p_1,p_2) = (\mathcal{E},\mathcal{E})$. Berikut diberikan contoh untuk menjelaskan kelas ekuivalensi pada $\mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min}$ oleh relasi $\mathcal{B}$ pada Definisi 4.

Contoh:
Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\overline{(3,1)} &= \{(p_1,p_2) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min} | (p_1,p_2)\mathcal{B}(3,1)\} \\
&= \{(p_1,p_2) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min} |\ p_1 \oplus 1 = p_2 \oplus 3\} \\
&= \{(p_1,p_2) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min} |\ p_1 > 1, p_2 = 1\} \\
&= \{(p_1,1) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min} |\ p_1 > 1\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{(2,1)} &= \{(p_1,p_2) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min} | (p_1,p_2)\mathcal{B}(2,1)\} \\
&= \{(p_1,p_2) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min} |\ p_1 \oplus 1 = p_2 \oplus 2\} \\
&= \{(p_1,p_2) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min} |\ p_1 > 1, p_2 = 1\} \\
&= \{(p_1,1) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min} |\ p_1 > 1\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{(\infty,1)} &= \{(p_1,p_2) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min} | (p_1,p_2)\mathcal{B}(\infty,1)\} \\
&= \{(p_1,p_2) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min} |\ p_1 \oplus 1 = p_2 \oplus \infty\} \\
&= \{(p_1,p_2) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min} |\ p_1 > 1, p_2 = 1\} \\
&= \{(p_1,1) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min} |\ p_1 > 1\}
\end{aligned}$$

Dengan demikian, $\overline{(2,1)} = \overline{(3,1)} = \cdots = \overline{(\infty,1)} = \overline{(p_1,1)}$ untuk $p_1 > 1$ dan cukup diwakili oleh $\overline{(\infty,1)}$.

Selanjutnya diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\overline{(1,3)} &= \{(p_1,p_2) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min} | (p_1,p_2)\mathcal{B}(1,3)\} \\
&= \{(p_1,p_2) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min} |\ p_1 \oplus 3 = p_2 \oplus 1\} \\
&= \{(p_1,p_2) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min} |\ p_2 > 1, p_1 = 1\} \\
&= \{(1,p_2) \in \mathbb{R}_{\min} \times \mathbb{R}_{\min} |\ p_2 > 1\}.
\end{aligned}$$

https://doi.org/10.30736/voj.v4i1.444

$$\begin{aligned}\overline{(1,2)} &= \{(p_1,p_2)\in\mathbb{R}_{\min}\times\mathbb{R}_{\min}|(p_1,p_2)\mathcal{B}(1,2)\}\\ &= \{(p_1,p_2)\in\mathbb{R}_{\min}\times\mathbb{R}_{\min}|\, p_1\oplus 2 = p_2\oplus 1\}\\ &= \{(p_1,p_2)\in\mathbb{R}_{\min}\times\mathbb{R}_{\min}|\, p_2>1, p_1=1\}\\ &= \{(1,p_2)\in\mathbb{R}_{\min}\times\mathbb{R}_{\min}|\, p_2>1\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{(1,\infty)} &= \{(p_1,p_2)\in\mathbb{R}_{\min}\times\mathbb{R}_{\min}|(p_1,p_2)\mathcal{B}(1,\infty)\}\\ &= \{(p_1,p_2)\in\mathbb{R}_{\min}\times\mathbb{R}_{\min}|\, p_1\oplus \infty = p_2\oplus 1\}\\ &= \{(p_1,p_2)\in\mathbb{R}_{\min}\times\mathbb{R}_{\min}|\, p_2>1, p_1=1\}\\ &= \{(1,p_2)\in\mathbb{R}_{\min}\times\mathbb{R}_{\min}|\, p_2>1\}\end{aligned}$$

Dengan demikian, $\overline{(1,2)} = \overline{(1,3)} = \cdots = \overline{(1,\infty)} = \overline{(1,p_2)}$ untuk $p_2>1$ dan cukup diwakili oleh $\overline{(1,\infty)}$.
Diperhatikan juga bahwa

$$\begin{aligned}\overline{(1,1)} &= \{(p_1,p_2)\in\mathbb{R}_{\min}\times\mathbb{R}_{\min}|(p_1,p_2)\mathcal{B}(1,1)\}\\ &= \{(p_1,p_2)\in\mathbb{R}_{\min}\times\mathbb{R}_{\min}|\,(p_1,p_2)=(1,1)\}\\ &= \{(1,1)\}.\blacksquare\end{aligned}$$

Karena $\mathcal{B}$ adalah relasi ekuivalensi, maka diperoleh kelas ekuivalensi yang saling asing pada $\mathbb{R}_{\min}\times\mathbb{R}_{\min}$ atas relasi $\mathcal{B}$ tersebut. Secara umum, kelas-kelas pada $\mathbb{R}_{\min}\times\mathbb{R}_{\min}$ atas relasi $\mathcal{B}$ dapat dikelompokkan pada tiga jenis untuk suatu $x\in\mathbb{R}_{\min}$, yakni kelas:

1. Kelas $\overline{(\infty,x)} = \{(a,x)\in\mathbb{R}_{\min}\times\mathbb{R}_{\min}|a>x\}$ (5)
2. Kelas $\overline{(x,\infty)} = \{(x,a)\in\mathbb{R}_{\min}\times\mathbb{R}_{\min}|a>x\}$ (6)
3. Kelas $\overline{(x,x)} = \{(x,x)\in\mathbb{R}_{\min}\times\mathbb{R}_{\min}\}$, (7)

Untuk selanjutnya kelas $\overline{(\mathcal{E},\mathcal{E})}$ dinamakan kelas max-plus nol. Diperhatikan bahwa $\overline{(\infty,x)}\cap\overline{(x,\infty)}\cap\overline{(x,x)} = \overline{(\infty,\infty)} = \overline{(\mathcal{E},\mathcal{E})}$. Kelas-kelas pada (5), (6) dan (7), disajikan dalam bentuk elemen di $\mathbb{R}_{\min}$ dengan $x\in\mathbb{R}_{\min}$, yakni:

1. Kelas $\overline{(x,\infty)}$ cukup ditulis dengan x (8)
2. Kelas $\overline{(\infty,x)}$ cukup ditulis $\ominus x$ (9)
3. Kelas $\overline{(x,x)}$ cukup ditulis $x^{\bullet}$, (10)

Untuk selanjutnya, himpunan semua elemen x pada (8), $\ominus x$ pada (9) dan $x^{\bullet}$ pada (10) masing-masing dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$, $\mathbb{R}_{\min}{}^{\ominus}$ dan $\mathbb{R}_{\min}{}^{\bullet}$. Hasil simetrisasi pada $\mathbb{R}_{\min}$ adalah $\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}, \mathbb{R}_{\min}{}^{\ominus}$ dan $\mathbb{R}_{\min}{}^{\bullet}$, yang dapat dianalogikan dengan $\mathbb{R}^{+}, \mathbb{R}^{-}$ dan 0 pada pembahasan himpunan bilangat riil.

Berikut disajikan suatu teorema yang menjelaskan korespondensi antara himpunan $\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$ dengan $\mathbb{R}_{\min}$.

Teorema 4

Diberikan fungsi $f:\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}\to\mathbb{R}_{\min}$ dengan $f\left(\overline{(p_1,\infty)}\right)=p_1$, untuk setiap $\overline{(p_1,\infty)}\in\left\{\overline{(p_1,\infty)}\right\}$. Fungsi f adalah fungsi bijektif dan mengawetkan operasi penjumlahan $\oplus$ dan perkalian $\otimes$.

Bukti

Untuk setiap $\overline{(p_1,-\infty)}, \overline{(q_1,-\infty)}\in\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$, jika $f\left(\overline{(p_1,-\infty)}\right) = f\left(\overline{(q_1,-\infty)}\right)$

E-ISSN: 2656-5846
P-ISSN: 2656-2286

maka berdasarkan definisi fungsi f diperoleh $p_1 = p_2$. Dengan demikian, f bersifat injektif. Selanjutnya, untuk setiap $p_1 \in \mathbb{R}_{\min}$, selalu terdapat $\overline{(p_1, -\infty)} \in \mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$ sedemikian hingga $f\left(\overline{(p_1, -\infty)}\right) = p_1$, sehingga f adalah fungsi surjektif. Mengingat f merupakan fungsi injektif dan surjektif, maka f merupakan fungsi bijektif.

Apabila diambil sembarang $\overline{(p_1, -\infty)}, \overline{(q_1, -\infty)} \in \mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$ maka:

1. $f\left(\overline{(p_1, -\infty)} \oplus \overline{(q_1, -\infty)}\right) = f\left(\overline{(p_1, -\infty)}\right) \oplus f\left(\overline{(q_1, -\infty)}\right)$
2. $f\left(\overline{(p_1, -\infty)} \otimes \overline{(q_1, -\infty)}\right) = f\left(\overline{(p_1, -\infty)}\right) \otimes f\left(\overline{(q_1, -\infty)}\right)$.

Dengan demikian f merupakan fungsi bijektif yang mengawetkan operasi penjumlahan $\oplus$ dan perkalian $\otimes$.■

Misalkan hasil dari simetrisasi dari $\mathbb{R}_{\min}$ dinotasikan dengan $\mathcal{S}$, maka berlaku sifat gabungan $\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus} \cup \mathbb{R}_{\min}{}^{\ominus} \cup \mathbb{R}_{\min}{}^{\bullet} = \mathcal{S}$. Sementara itu, juga berlaku sifat irisan $\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus} \cap \mathbb{R}_{\min}{}^{\ominus} \cap \mathbb{R}_{\min}{}^{\bullet} = \overline{(\mathcal{E}, \mathcal{E})}$. Operasi penjumlahan dan perkalian pada $\mathcal{S}$ untuk setiap $\overline{(p_1, p_2)}, \overline{(q_1, q_2)} \in \mathcal{S}$ didefinisikan sebagai berikut.

$$\overline{(p_1, p_2)} \mathbin{\overline{\oplus}} \overline{(q_1, q_2)} = \overline{(p_1 \oplus q_1, p_2 \oplus q_2)} \tag{11}$$

$$\overline{(p_1, p_2)} \mathbin{\overline{\otimes}} \overline{(q_1, q_2)} = \overline{(p_1 \otimes q_1 \oplus p_2 \otimes q_2, p_1 \otimes q_2 \oplus p_2 \otimes q_1)} \tag{12}$$

Berikut diberikan teorema yang menjelaskan struktur aljabar dari $\mathbb{S}$.

Teorema 5

Sistem matematika dari $(\mathcal{S}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ *adalah semiring idempoten komutatif.*

Bukti

Perhatikan bahwa $(\mathcal{S}, \overline{\oplus})$ merupakan suatu semigrup komutatif dengan elemen nol $\overline{(\mathcal{E}, \mathcal{E})}$. Selain itu operasi $\overline{\oplus}$ bersifat idempotent, yakni

$$\overline{(p_1, p_2)} \mathbin{\overline{\oplus}} \overline{(p_1, p_2)} = \overline{(p_1 \oplus p_1, p_2 \oplus p_2)} = \overline{(p_1, p_2)}.$$

Sementara itu $(\mathcal{S}, \overline{\otimes})$ merupakan suatu semigrup dengan elemen satuan $\overline{(e, \mathcal{E})}$ dan operasi $\overline{\otimes}$ bersifat komutatif. Elemen nol $\overline{(\mathcal{E}, \mathcal{E})}$ merupakan elemen penyerap terhadap operasi perkalian untuk semua $\overline{(p_1, p_2)} \in \mathcal{S}$, yakni:

$$\overline{(p_1, p_2)} \mathbin{\overline{\otimes}} \overline{(\mathcal{E}, \mathcal{E})} = \overline{(\mathcal{E}, \mathcal{E})} \mathbin{\overline{\otimes}} \overline{(p_1, p_2)} = \overline{(\mathcal{E}, \mathcal{E})}.$$

Operasi $\overline{\otimes}$ distributif terhadap $\overline{\oplus}$.
Dengan demikian, $\mathcal{S}$ adalah semiring idempoten komutatif. ■

Tabel 1. Analogi $\mathbb{R}$ dengan $\mathcal{S}$

Analogi	$\mathbb{R}$	$\mathcal{S}$
Penjumlahan	$+$	$\oplus$
Perkalian	$\times$	$\otimes$
Negatif	$-$	$\ominus$
Relasi	$=$	∇
Nol	0	$a^{\bullet}$
Bagian Positif	$\mathbb{R}^{+}$	$\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}$
Bagian Negatif	$\mathbb{R}^{-}$	$\mathbb{R}_{\min}{}^{\ominus}$

Vygotsky: Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika
https://doi.org/10.30736/voj.v4i1.444

Tabel 1 menjelaskan analogi dari himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$ pada aljabar konvensional dengan himpunan hasil simetrasi aljabar min-plus yaitu $\mathcal{S}$. Simetrisasi aljabar min-pus tersebut dilakukan untuk memperoleh bentuk negatif dan setimbang dari elemen-elemen pada aljabar min-plus.

Pada pembahasan aljabar min-plus, setiap elemen tidak memiliki invers penjumlahan, kecuai elemen nol. Untuk setiap $x \in \mathbb{R}_{\min}$ dengan $x \neq \mathcal{E}$, permasalahan

$$x \oplus y = \mathcal{E}$$

tidak dapat ditentukan solusi untuk y. Hal ini dikarenakan tidak ada $y \in \mathbb{R}_{\min}$ yang memenuhi persamaan $x \oplus y = \mathcal{E}$. Apabila masalah tersebut ditinjau pada simetrisasi aljabar min-plus dan disajikan dalam bentuk

$$x \oplus y \, \nabla \, \mathcal{E}$$

maka terdapat y yang memenuhi yakni $y = \ominus x$. Diperhatikan bahwa untuk setiap $x \in \mathcal{S}$ berlaku $x \oplus (\ominus x) \, \nabla \, \mathcal{E}$. Sebagai contoh, masalah

$$x \oplus 2 = \mathcal{E}$$

tidak memiliki solusi x pada pembahasan aljabar min-plus. Akan tetapi, apabila masalah tersebut ditinjau pada simetrisasi aljabar min-plus yakni

$$x \oplus 2 \, \nabla \, \mathcal{E}$$

maka diperoleh solusi $x = \ominus 2$.

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Pada pembahasan aljabar min-plus $\mathbb{R}_{\min}$, setiap elemen tidak memiliki invers terhadap operasi penjumlahan, kecuali untuk elemen nol. Proses simetrisasi dapat dilakukan pada aljabar min-plus dengan menggunakan relasi setimbang untuk memperoleh bentuk negatif dan setimbang dari elemen-elemen aljabar min-plus. Himpunan yang diperoleh dari proses simetrisasi ini dapat dikelompokkan dalam $\mathbb{R}_{\min}{}^{\oplus}, \mathbb{R}_{\min}{}^{\ominus}$ dan $\mathbb{R}_{\min}{}^{\bullet}$, yang dapat dianalogikan dengan $\mathbb{R}^{+}, \mathbb{R}^{-}$ dan 0 pada pembahasan himpunan bilangat riil.

Saran

Penelitian selanjutnya dapat dikembangkan pada korespondensi hasil simetrisasi aljabar min-plus dengan aljabar konvensional. Selain itu juga berpotensi untuk dikembangkan pada sistem kesetimbangan linier atas simetrisasi aljabar min-plus sebagai perluasan dari sistem persamaan linier atas aljabar min-plus.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terimakasih kepada semua pihak yang terkait dengan penelitian ini, terutama Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat Universitas Jenderal Soedirman yang memberikan dana penelitian dengan kontrak No T/458/UN23.18/PT.01.03/2021

DAFTAR RUJUKAN

Akian, M., Cohen, G., Gaubert, S., Nikoukhah, R., & Quadrat, J. P. (1990). Linear systems in (max, +) algebra. *29th IEEE Conference on Decision and*

E-ISSN: *2656-5846*
P-ISSN: *2656-2286*

Control, 151–156 vol.1. https://doi.org/10.1109/CDC.1990.203566

Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J., & Quadrat, J. P. (Eds.). (2001). *Synchronization and linearity: An algebra for discrete event systems*. Wiley.

De Schutter, B. (1996). *Max-algebraic system theory for discrete event systems*. Katholieke Universiteit Leuven.

De Schutter, B., & De Moor, B. (2002). The QR Decomposition and the Singular Value Decomposition in the Symmetrized Max-Plus Algebra Revisited. *SIAM Review*, *44*(3), 417–454. https://doi.org/10.1137/S00361445024039

Farhi, N. (2009). Modeling and control of elementary 2D-Traffic systems using Petri nets and minplus algebra. *Proceedings of the 48h IEEE Conference on Decision and Control (CDC) Held Jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*, 2292–2297. https://doi.org/10.1109/CDC.2009.5400562

Golan, J. S. (2005). Some Recent Applications of Semiring Theory. *Internasinal Conference on Algebra in Memory of Kostia Beidar Tainan March 6–12, 2005*, 18.

Jamshidvand, S., Ghalandarzadeh, S., Amiraslani, A., & Olia, F. (2019). On the Maximal Solution of A Linear System over Tropical Semirings. *ArXiv:1904.13169 [Math]*. http://arxiv.org/abs/1904.13169

Li, M., & Zhao, W. (2012). Asymptotic Identity in Min-Plus Algebra: A Report on CPNS. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, *2012*, 1–11. https://doi.org/10.1155/2012/154038

Litvinov, G. L., Maslov, V. P., Kushner, A. G., & Sergeev, S. N. (2012). *Tropical and Idempotent Mathematics*. 276.

Marjanovic, M. M. (2018). Extensions of the System N of Natural Numbers Assigned to Primary Teachers. *OALib*, *05*(01), 1–13. https://doi.org/10.4236/oalib.1104096

Pramesthi, S. R. P. W. (2021). Simulasi Petri Net pada Proses Produksi Susu Fermentasi. *VYGOTSKY*, *3*(1), 25. https://doi.org/10.30736/voj.v3i1.349

Spalding, A. (1998). Min-Plus Algebra and Graph Domination. *Ph.D Dissertation, University of Colorado*.

Speyer, D., & Sturmfels, B. (2004). Tropical Mathematics. *ArXiv:Math/0408099*. http://arxiv.org/abs/math/0408099

Suwanti, V., Bintoto, P., & Dinullah, R. N. I. (2017). Penerapan Min-Plus Algebra pada Penentuan Rute Tercepat Distribusi Susu. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, *14*(2), 15. https://doi.org/10.12962/limits.v14i2.3085

Watanabe, S., & Watanabe, Y. (2014). Min-Plus Algebra and Networks. *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, *B47*, 041–054.

Zanardo, A., Breda, F., Meneghello, A., Cardano, F. M., & Zampieri, F. (2016). Tropical Mathematics. *University of Padova, Italy*.

Vygotsky**: Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika**
https://doi.org/10.30736/voj.v4i1.444